極大単調作用素の列を用いた収束定理と作用素の零点近似(非線形解析学と凸解析学の研究)

木村, 泰紀

数理解析研究所講究録
1484 巻 2006 年 79-86

極大単調作用素の列を用いた収束定理と作用素の零点近似

東京工業大学・大学院情報理工学研究科
木村泰紀 (Yasunori Kimura)
Department of Mathematical and Computing Sciences
Tokyo Institute of Technology

1 序論

実 Hilbert 空間 H 上の極大単調作用素 A に対してその零点 $A^{-1}0=\{x\in H:0\in Ax\}$ を求めるという問題は, 最小化問題や変分不等式問題等, 多くの問題との関わりをもっており, 深い研究が進められている. 代表的な例としては Rockafellar[9], Brézis-Lions[2], Pazy[7], 上村・高橋 [5] 等の結果が挙げられる. また, 同様の問題について Banach 空間への拡張も盛んに研究されており, Bruck-Reich[3], Reich[8], Jung・高橋 [4], 上村・高橋 [6] 等の結果がある.

この問題の解を近似的に求める方法の一つとしては, 近接点法が有名である. すなわち, 与えられた初期点 $x_1\in H$ に対して, リゾルベントと呼ばれる写像 $(I+rA)^{-1}$ を用いて

$$x_{n+1}=(I+rA)^{-1}x_n$$

とすることで反復的に点列を生成し, 解に収束させる手法である. この手法に関連する結果も多く得られているが, 中でも上村・高橋 [5] による結果は近接点法にいわゆる Mann 型と呼ばれる反復的手法を取り入れた結果であり, 非常に興味深いものである.

本稿では, 上村・高橋による結果をさらに一般化することを試みる. 具体的には, リゾルベントの計算誤差として扱われていた項を作用素そのものに取り込むことで作用素の列を構成し, 誤差に対する条件の代わりに作用素列に条件を与えることによって, 上村・高橋による結果と同様の弱収束定理を得る. このような作用素列の構成法は, 上村・高橋による結果のみならず, より多くの反復的な点列構成法を一般化したものとなることも期待さ

れるものである.

2 準備

本稿で扱う空間は常に実 Hilbert 空間である. 内積は $\langle\cdot,\cdot\rangle$ であらわし, ノルムは $\|\cdot\|$ であらわす.

実 Hilbert 空間 H からそれ自身への多価写像 A が単調作用素であるとは, 任意の $x, y \in H$ と $u \in Ax$, $v \in Ay$ に対して

$$\langle x-y, u-v\rangle \geq 0$$

が成り立つことをいう. 単調作用素 A が極大であるとは, A をグラフとして含む作用素 B が単調ならば $A=B$ が導かれることをいう. 正の実数 r に対して, 単調作用素 A のリゾルベントを $(I+rA)^{-1}$ で定義する. このとき, A の単調性から $(I+rA)^{-1}$ は一価写像になることがわかる. また, A が極大単調作用素のとき, 作用素 $I+rA$ の値域は H となるので, リゾルベントの定義域も H 全体となる. さらに, $(I+rA)^{-1}$ は非拡大性という重要な性質をもつ. すなわち

$$\|(I+rA)^{-1}x-(I+rA)^{-1}y\| \leq \|x-y\|$$

が $(I+rA)^{-1}$ の定義域の任意の点 x, y に対して成り立つ. さらなる詳細については [10, 1] 等を参照せよ.

ここで, 実数列に関する基本的かつ重要な補題を一つ挙げておく.

補題 1 (Tan-Xu[11]). $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を非負実数列で, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$a_{n+1} \leq a_n + b_n$$

をみたすものとする. このとき, もし $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$ が成り立つならば, $\{a_n\}$ は非負の実数に収束する.

3 極大単調作用素列を用いた弱収束定理

この節ではまず本稿の主結果を証明し, さらに定理で用いられる作用素列として作用素に誤差を加えたものを考えることによって, 上村・高橋 [5] によって得られた結果を導くことができることを示す.

定理 1. H を実 Hilbert 空間とし, $\{A_n\}$ を H 上の極大単調作用素の列とする. C_0 を H の閉凸部分集合で, 以下の条件をみたすものとする.

(i) 任意の $z \in C_0$ に対して, H のある点列 $\{z_n\}$ および $\{w_n\}$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $w_n \in A_n z_n$ をみたしかつ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n - z\| < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|w_n\| < +\infty$$

が成り立つ.

(ii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ において $u_n \in A_n v_n$ をみたす H の点列 $\{u_n\}$ および $\{v_n\}$ に対し, $\{u_n\}$ が 0 に強収束するならば, $\{v_n\}$ の弱収束する部分列の極限は C_0 に属する.

このとき, 実数列 $\{\alpha_n\} \subset [0, b] \subset [0, 1[$ に対する点列 $\{x_n\}$ を $x_1 \in H$ および

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) J_n x_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

で定義すると $\{x_n\}$ は C_0 の点に弱収束する. ここで $J_n = (I + A_n)^{-1}$ である.

証明. 任意に $z \in C_0$ を固定すると, 仮定よりある H の点列 $\{z_n\}$ と $\{w_n\}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $w_n \in A_n z_n$ をみたしかつ $\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n - z\| < +\infty$ と $\sum_{n=1}^{\infty} \|w_n\| < +\infty$ が成り立つ. ここで, $z_n + w_n \in (I + A_n) z_n$ であることから

$$z_n = (I + A_n)^{-1}(z_n + w_n) = J_n(z_n + w_n)$$

が成り立つ. これを用いて

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - z\| &\le \alpha_n \|x_n - z\| + (1 - \alpha_n)\|J_n x_n - z\| \\
&\le \alpha_n \|x_n - z\| + (1 - \alpha_n)(\|J_n x_n - z_n\| + \|z_n - z\|) \\
&\le \alpha_n \|x_n - z\| + (1 - \alpha_n)\|J_n x_n - J_n(z_n + w_n)\| + \|z_n - z\| \\
&\le \alpha_n \|x_n - z\| + (1 - \alpha_n)\|x_n - z_n - w_n\| + \|z_n - z\| \\
&\le \alpha_n \|x_n - z\| + (1 - \alpha_n)\|x_n - z_n\| + \|w_n\| + \|z_n - z\| \\
&\le \alpha_n \|x_n - z\| + (1 - \alpha_n)\|x_n - z\| + \|w_n\| + 2\|z_n - z\| \\
&\le \|x_n - z\| + \|w_n\| + 2\|z_n - z\|
\end{aligned}$$

が得られる. よって $\{x_n\}$ は有界であり, 補題 1 より非負の実数列 $\{\|x_n - z\|\}$ は極限 c に収束する. $c = 0$ の場合, $\{x_n\}$ は z に強収束するので定理は明らかに成立する. よって

$c > 0$ を仮定しよう. $\{z_n\}$ が z に強収束することを用いると, $\{\|x_n - z_n\|\}$ も c に収束することがわかる. また, $\|x_{n+1} - z\| \le \alpha_n \|x_n - z\| + (1 - \alpha_n)\|J_n x_n - z\|$ より

$$\begin{aligned}\|J_n x_n - z_n\| &\ge \|J_n x_n - z\| - \|z - z_n\| \\ &\ge \|x_n - z\| + \frac{1}{1-\alpha_n}(\|x_{n+1} - z\| - \|x_n - z\|) - \|z - z_n\|\end{aligned}$$

であり, さらに $\|x_{n+1} - z\| \le \|x_n - z\| + \|w_n\| + 2\|z_n - z\|$ であることから

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1-\alpha_n}(\|x_{n+1} - z\| - \|x_n - z\|) \\ &\ge \frac{1}{1-\alpha_n}(\|x_{n+1} - z\| - \|x_n - z\| - \|w_n\| - 2\|z_n - z\|) \\ &\ge \frac{1}{1-b}(\|x_{n+1} - z\| - \|x_n - z\| - \|w_n\| - 2\|z_n - z\|).\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}&\|J_n x_n - z_n\| \\ &\quad\ge \|x_n - z\| + \frac{1}{1-b}(\|x_{n+1} - z\| - \|x_n - z\| - \|w_n\| - 2\|z_n - z\|) - \|z - z_n\|\end{aligned}$$

が任意の $n \in \mathbb{N}$ で成り立つので, 極限をとると

$$\liminf_{n\to\infty} \|J_n x_n - z_n\| \ge c + \frac{1}{1-b}(c - c - 0 - 0) - 0 = c.$$

一方, 各 J_n は非拡大なので,

$$\begin{aligned}\|J_n x_n - z_n\| &= \|J_n x_n - J_n(z_n + w_n)\| \\ &\le \|x_n - z_n - w_n\| \\ &\le \|x_n - z_n\| + \|w_n\|\end{aligned}$$

であり, 極限をとると

$$\limsup_{n\to\infty} \|J_n x_n - z_n\| \le c + 0 = c.$$

したがって $\lim_{n\to\infty} \|J_n x_n - z_n\| = c$ を得る. ここで各 A_n が単調作用素であることを用いると, $x_n - J_n x_n \in A_n J_n x_n$ かつ $w_n \in A_n z_n$ であることから

$$\begin{aligned}&\|J_n x_n - z_n\|\|J_n x_n + x_n - 2z_n\| \\ &\ge \langle J_n x_n - z_n, J_n x_n + x_n - 2z_n\rangle \\ &= \langle J_n x_n - z_n, 2(J_n x_n - z_n) + x_n - J_n x_n\rangle\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\|J_n x_n - z_n\|^2 + \langle J_n x_n - z_n, x_n - J_n x_n\rangle \\
&= 2\|J_n x_n - z_n\|^2 + \langle J_n x_n - z_n, (x_n - J_n x_n) - w_n\rangle + \langle J_n x_n - z_n, w_n\rangle \\
&\geq 2\|J_n x_n - z_n\|^2 - \|J_n x_n - z_n\|\|w_n\| \\
&= \|J_n x_n - z_n\|(2\|J_n x_n - z_n\| - \|w_n\|)
\end{aligned}
$$

となり, これより

$$2\|J_n x_n - z_n\| - \|w_n\| \leq \|J_n x_n + x_n - 2z_n\|$$

を得る. $\{\|J_n x_n - z_n\|\}$ が $c > 0$ に収束し, $\{\|w_n\|\}$ が 0 に収束することを考えると, 十分大きな n に対して $2\|J_n x_n - z_n\| - \|w_n\| > 0$ が成り立ち, そのときは

$$4(\|J_n x_n - z_n\| - \|w_n\|)^2 \leq \|J_n x_n + x_n - 2z_n\|^2$$

である. これを用いると, 平行四辺形公式より

$$
\begin{aligned}
\|J_n x_n - x_n\|^2 &= \|(J_n x_n - z_n) - (x_n - z_n)\|^2 \\
&= 2\|J_n x_n - z_n\|^2 + 2\|x_n - z_n\|^2 - \|J_n x_n + x_n - 2z_n\|^2 \\
&\leq 2\|J_n x_n - z_n\|^2 + 2\|x_n - z_n\|^2 - 4(\|J_n x_n - z_n\| - \|w_n\|)^2.
\end{aligned}
$$

ここで極限をとると

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \|J_n x_n - x_n\|^2 \leq 2c^2 + 2c^2 - 4c^2 = 0.$$

したがって $\lim_{n\to\infty}(J_n x_n - x_n) = 0$ を得る. このとき, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $u_n = x_n - J_n x_n$, $v_n = J_n x_n$ とすると, J_n の定義より $u_n \in A_n v_n$ であり, $\{u_n\}$ は 0 に強収束することがわかる. よって仮定 (ii) より $\{x_n\}$ の任意の弱収束部分列の極限は C_0 に属する. $\{x_{i_n}\}$, $\{x_{j_n}\}$ を弱収束する $\{x_n\}$ の部分列とし, その極限をそれぞれ y_1, y_2 としよう. このとき, y_1, y_2 はともに C_0 の点であるから, $\lim_{n\to\infty}\|x_n - y_1\|$, $\lim_{n\to\infty}\|x_n - y_2\|$ が存在する. したがって

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \lim_{n\to\infty}\|x_n - y_1\| = \lim_{n\to\infty}\|x_{i_n} - y_1\| = \lim_{n\to\infty}\|x_{j_n} - y_1\|, \\
c_2 &= \lim_{n\to\infty}\|x_n - y_2\| = \lim_{n\to\infty}\|x_{i_n} - y_2\| = \lim_{n\to\infty}\|x_{j_n} - y_2\|
\end{aligned}
$$

となる. 一方,

$$
\begin{aligned}
c_2 &= \lim_{n\to\infty}\|x_{i_n} - y_2\|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty}\|(x_{i_n} - y_1) - (y_1 - y_2)\|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} (\|x_{i_n} - y_1\|^2 - 2\langle x_{i_n} - y_1, y_1 - y_2\rangle + \|y_1 - y_2\|^2) \\
&= \lim_{n\to\infty} \|x_{i_n} - y_1\|^2 - 2\lim_{n\to\infty} \langle x_{i_n} - y_1, y_1 - y_2\rangle + \|y_1 - y_2\|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \|x_{i_n} - y_1\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2 \\
&= c_1 + \|y_1 - y_2\|^2
\end{aligned}
$$

が成り立ち, 同様にして

$$c_1 = \lim_{n\to\infty} \|x_{j_n} - y_1\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|x_{j_n} - y_2\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2 = c_2 + \|y_1 - y_2\|^2$$

も成り立つ. これらの式より,

$$0 \le \|y_1 - y_2\|^2 = c_2 - c_1 = -\|y_1 - y_2\|^2 \le 0$$

となり, $y_1 = y_2$ を得る. したがって, 有界点列 $\{x_n\}$ の任意の弱収束部分列は唯一の点 $y \in C_0$ に弱収束するので, $\{x_n\}$ も $y \in C_0$ に弱収束することが示された. □

$\{f_n\}$ を実 Hilbert 空間 H の点列とし, $\{r_n\}$ を正の実数列としよう. このとき, H 上の空でない零点をもつ極大単調作用素 A に対して作用素列 $\{A_n\}$ を

$$A_n x = r_n A(x - f_n) - f_n \quad (x \in H)$$

で定義すると, 各 A_n も極大単調作用素となる. さらに,

$$
\begin{aligned}
(I + A_n)x &= x + r_n A(x - f_n) - f_n \\
&= r_n A(x - f_n) + (x - f_n) \\
&= (I + r_n A)(x - f_n)
\end{aligned}
$$

であるから, $y \in (I + A_n)x = (I + r_n A)(x - f_n)$ のとき, $x = (I + A_n)^{-1}y$ かつ $x - f_n = (I + r_n A)^{-1}y$ が成り立つ. したがって $J_n = (I + A_n)^{-1}$ とすると

$$J_n y = (I + A_n)^{-1}y = (I + r_n A)^{-1}y + f_n$$

である. よって, 定理 1 の点列の定義に適用すると, $x_1 \in H$ かつ

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) J_n x_n \\
&= \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)((I + r_n A)^{-1} x_n + f_n) \quad (n \in \mathbb{N})
\end{aligned}
$$

となる. ここで $\inf_{n\in\mathbb{N}} r_n > 0$ および $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < +\infty$ を仮定すると, $\{A_n\}$ は定理 1 の条件 (i)(ii) をともにみたすことが次のようにしてわかる. $C_0 = A^{-1}0$ とし, 任意の $z \in C_0$ に対して

$$z_n = z + f_n, \quad w_n = -f_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

としよう．このとき $0 \in Az$ より，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} A_n z_n &= r_n A(z_n - f_n) - f_n \\ &= r_n A(z + f_n - f_n) - f_n \\ &= r_n Az - f_n \\ &\ni -f_n = w_n \end{aligned}$$

が成り立つ．さらに

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n - z\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|w_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < +\infty$$

であるから，(i) が成り立つことがわかった．一方，$\{u_n\}$ および $\{v_n\}$ を，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $u_n \in A_n v_n$ をみたす点列とし，$\{u_n\}$ が 0 に強収束すると仮定しよう．$x, y \in H$ を $y \in Ax$ をみたす任意の点とするとき，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_n = x + f_n, \quad y_n = r_n y - f_n$$

と定義すると $y_n \in A_n x_n$ が成り立つ．各 A_n が極大単調作用素であることを用いると，

$$0 \leq \langle x_n - v_n, y_n - u_n \rangle = r_n \left\langle x_n - v_n, y - \frac{1}{r_n}(f_n + u_n) \right\rangle$$

より

$$\left\langle x_n - v_n, y - \frac{1}{r_n}(f_n + u_n) \right\rangle \geq 0$$

が得られる．ここで，$\{v_n\}$ の弱収束する部分列に対してその極限を v_0 とすると，極限をとることで

$$\langle x - v_0, y - 0 \rangle \geq 0$$

が成り立つことがわかる．したがって A の極大性より $0 \in Av_0$，すなわち，$v_0 \in A^{-1}0 = C_0$ となり，(ii) も成り立つことがわかった．

このことから，定理 1 を用いて上村・高橋 [5] によって得られた次の定理が得られる．[6] も参照せよ．

定理 2 (上村・高橋 [5]). A を実 Hilbert 空間 H 上の極大単調作用素とし，$A^{-1}0$ が空でないとする．点列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ を，実数列 $\{\alpha_n\} \subset [0, b] \subset [0, 1[$ と $\{r_n\} \subset [a, +\infty[\subset]0, +\infty[$ に対し

$$x_1 \in H,$$

$$y_n = (I + r_n A)^{-1} x_n + f_n,$$
$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) y_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

で定義する. このとき, $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < +\infty$ ならば $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の点に弱収束する.

参考文献

[1] V. Barbu and T. Precupanu, *Convexity and optimization in Banach spaces*, revised ed., Editura Academiei, Bucharest, 1978, Translated from the Romanian.

[2] H. Brézis and P.-L. Lions, *Produits infinis de résolvantes*, Israel J. Math. **29** (1978), 329–345.

[3] R. E. Bruck and S. Reich, *Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces*, Houston J. Math. **3** (1977), 459–470.

[4] J. S. Jung and W. Takahashi, *Dual convergence theorems for the infinite products of resolvents in Banach spaces*, Kodai Math. J. **14** (1991), 358–365.

[5] S. Kamimura and W. Takahashi, *Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces*, J. Approx. Theory **106** (2000), 226–240.

[6] ———, *Weak and strong convergence of solutions to accretive operator inclusions and applications*, Set-Valued Anal. **8** (2000), 361–374.

[7] A. Pazy, *Remarks on nonlinear ergodic theory in Hilbert space*, Nonlinear Anal. **3** (1979), 863–871.

[8] S. Reich, *Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **75** (1980), 287–292.

[9] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optimization **14** (1976), 877–898.

[10] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis: fixed point theory and its applications*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[11] K. K. Tan and H. K. Xu, *Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process*, J. Math. Anal. Appl. **178** (1993), 301–308.